

# Quelle méthodologie pour le traitement et l'analyse d'images de milieux poreux?



M. Berthier  
Laboratoire Mathématiques Image et Applications  
Université de La Rochelle

- **Contenus élémentaires** : 3 types d'information : **Géométrie** (partie cartoon) - **Textures** (partie oscillante) - **Bruit** (partie parasite).



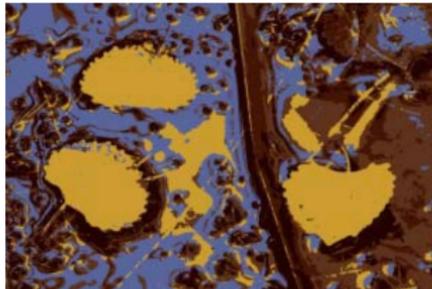
179	177	174	173	171	171	169	166	164	161
189	190	189	187	186	186	187	188	189	180
178	175	175	174	170	169	168	165	166	168
167	166	159	155	156	153	152	152	151	152
167	127	147	143	144	143	145	149	153	152
153	155	155	153	154	154	154	153	152	151
155	157	157	159	158	160	161	162	155	153
145	147	150	155	149	150	150	151	152	150
143	141	139	142	143	144	145	146	149	149
142	141	139	137	136	135	134	133	122	139

- Cartoon
- Fonctionnelle de Mumford Shah

$$E(u, S) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} (f - u)^2 dx + \frac{\lambda}{2} \int_{\Omega \setminus S} |\nabla u|_2^2 dx + \alpha \mathcal{H}^1(S)$$

$$E^\varepsilon(u, v) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} (f - u)^2 dx + \frac{\lambda}{2} \int_{\Omega} v^2 |\nabla u|_2^2 dx + \alpha \int_{\Omega} (\varepsilon |\nabla v|_2^2 + \frac{(v-1)^2}{4\varepsilon}) dx$$

$$\text{Diffusion dynamique} \quad \begin{cases} u_t = \lambda \nabla \cdot (v^2 \nabla u) - (u - f) \\ v_t = \alpha \varepsilon \nabla v - (\lambda |\nabla u|^2 v + \frac{\alpha(v-1)}{2\varepsilon}) \end{cases}$$



- Détection de contours
- Approches riemanniennes



- Approches par mesure de similarité



- Approches par gradient morphologique



- Textures
- L'espace de Meyer

$$\mathcal{G} = \{v = \nabla \cdot g, g = (g_1, g_2) \in L^\infty(\mathbb{R}^2) \times L^\infty(\mathbb{R}^2)\}$$

avec la norme

$$|v|_{\mathcal{G}} = \inf\{|g|_\infty, v = \nabla \cdot g, g = (g_1, g_2) \in L^\infty(\mathbb{R}^2) \times L^\infty(\mathbb{R}^2)\}$$

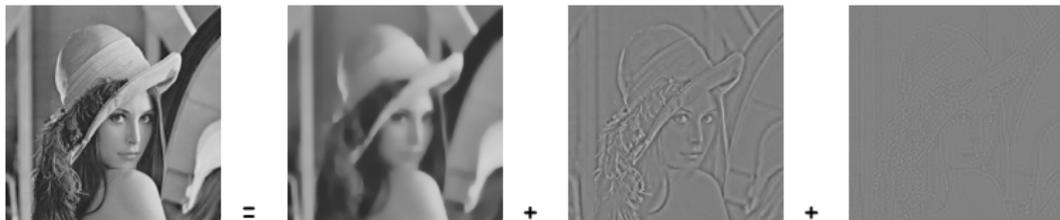
$$|\sin(nx)|_{L^2([0, \pi])} = \pi \quad |\sin(nx)|_{\mathcal{G}([0, \pi])} = 1/n$$

- La fonctionnelle de Vese Osher

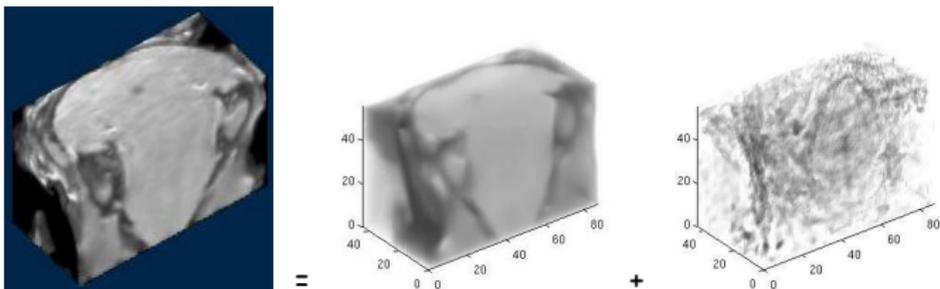
$$E(u, v) = \int_{\Omega} |\nabla u| dx + \lambda |f - u - v|_2^2 + \mu |v|_{\mathcal{G}(\Omega)}$$

$u$  est dans  $BV(\Omega)$  (composante géométrique) et  $v$  dans  $\mathcal{G}(\Omega)$  (composante texture). Le résidu  $f - u - v$  est le bruit. Minimisation avec l'algorithme de projection de Chambolle.

- Textures
- La décomposition



- En dimension 3



- Textures
- Les ondelettes - Définitions

$$g(a, b) = \frac{1}{\sqrt{a}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \bar{\psi}_{a,b}(t) dt$$

$$\psi_{a,b}(t) = \Psi\left(\frac{t-b}{a}\right)$$

$$f(t) = \frac{1}{c_\psi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{g(a, b)}{a^2} \psi_{a,b}(t) da db$$

- Analyse localisée (par  $b$ ) et multi-échelle (par  $a$ ). Plusieurs choix pour l'ondelette "mère" : chapeau mexicain (dérivée seconde d'une gaussienne), ondelettes de Haar, ondelettes de Daubechies, ondelettes de Morlet :



Figure :  $\Psi(t) = \exp(-t^2/2) \cos(5t)$

- Textures

- Les ondelettes - point de vue théorique

- Représentations irréductibles du groupe affine :

$$[U(a, b)\psi](t) = \frac{1}{\sqrt{a}} \psi\left(\frac{t-b}{a}\right)$$

- Fonctions analysantes ?  $T_a\psi = i\left(\frac{1}{2} + t\frac{\partial}{\partial t}\right)\psi$ ,  $T_b\psi = i\frac{\partial}{\partial t}\psi$ ,  $[T_a, T_b] = -iT_b$ ,

$$V_\psi(T_a)V_\psi(T_b) \geq \frac{1}{4} |\langle T_b \rangle_\psi|^2 \quad \text{vs} \quad E(\psi_n) = V_{\psi_n}(T_a)V_{\psi_n}(T_b) = \frac{9}{4n^2} \rightarrow 0$$

pour

$$\psi_n(t) = \sqrt{\frac{3}{2}} \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{t}{n\sqrt{n}} & |t| \leq n \\ 0 & |t| > n \end{cases}$$

- Pour les images : représentations du groupe des similitudes du plan

$$[U(a, b, \theta)\psi](x, y) = \frac{1}{|a|} \psi\left(R_{-\theta}\left(\frac{x-b_1}{a}, \frac{y-b_2}{a}\right)\right)$$

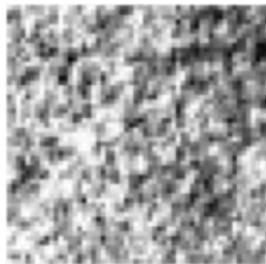
- Textures
- Les ondelettes - Mise en pratique
  - Les coefficients (échelles dyadiques)

$$\psi_{j,k}(t) = \sqrt{2^j} \Psi(2^j t - k) \quad g(j, k) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \bar{\psi}_{j,k}(t) dt$$

- Statistiques sur les coefficients d'images de textures : les gaussiennes généralisées

$$p(x; \alpha, \beta) = \frac{\beta}{2\alpha\Gamma(1/\beta)} e^{-(|x|/\alpha)^\beta}$$

( $\beta = 2$  : densité gaussienne,  $\beta = 1$  : densité laplacienne).



$\alpha = 0,46 \quad \beta = 1,52$

- Textures
- La géométrie de l'information
  - Divergence de Kullback-Leibler et métrique de Fisher

$$\text{Div}_{\text{KL}}(p(\mathbf{x}; \theta_1), p(\mathbf{x}; \theta_2)) = \int p(\mathbf{x}; \theta_1) \log \frac{p(\mathbf{x}; \theta_1)}{p(\mathbf{x}; \theta_2)} d\mathbf{x}$$

$$\mathbf{h} \mapsto \text{Hess}_{(p,p)}(\text{Div}_{\text{KL}}((0, \mathbf{h}), (0, \mathbf{h})))$$

- $\text{Div}_{\text{KL}}$  entre gaussiennes généralisées

$$\text{Div}_{\text{KL}}(p(\mathbf{x}; \alpha_1, \beta_1), p(\mathbf{x}; \alpha_2, \beta_2)) = \log \left( \frac{\beta_1 \alpha_2 \Gamma(1/\beta_2)}{\beta_2 \alpha_1 \Gamma(1/\beta_1)} \right) + \left( \frac{\alpha_1}{\alpha_2} \right)^{\beta_2} \frac{\Gamma((\beta_2 + 1)/\beta_1)}{\Gamma(1/\beta_1)} - \frac{1}{\beta_1}$$

- Reconnaissance et synthèse de textures à l'aide d'estimateurs géométriques, de barycentres ou de médianes.
- **Le projet importex** : Synthétiser des textures 3D à l'aide de la géométrie des statistiques des coefficients en ondelettes d'image 2D et par apprentissage sur des images 3D de milieux poreux.

- **Définition mathématique (Smirnov et al.)** :  $E$  sous-ensemble de  $\mathbb{R}^n$ ,  $x \in E$  et  $r > 0$

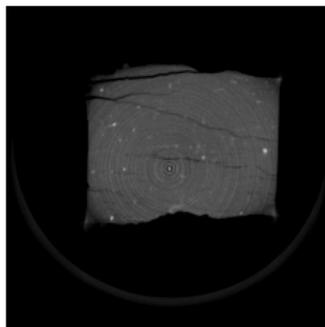
$$\text{Por}(E, x, r) = \sup \{ \alpha \geq 0, \exists B(y, \alpha r) \subset B(x, r) \setminus E \}$$

mesure la taille relative de plus grand trou dans  $E$  autour de  $x$  à l'échelle  $r$ .

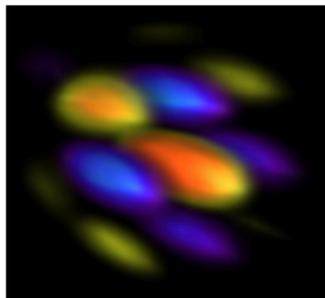
$$\text{Por}(E) = \sup \left\{ \alpha \geq 0, \liminf_{r \rightarrow 0} \text{Por}(E, x, r) \geq \alpha \forall x \in E \right\}$$

à relier au volume élémentaire représentatif et à l'élément structurant de la morphologie mathématique

- **La réalité des images (argilite)** :



- **Fractures vs textures** : lié à la résolution d'acquisition? Deux échelles d'observation?
- **Dans la "boite à lettres"** : ondelettes, curvelettes, bandelettes, ridgelettes et... beamlettes! Extension des curvelettes 3D dont le but est de représenter les structures filamenteuses dans des volumes 3D.



- **Fractures et inpainting** : inpainter les données manquantes relatives aux fractures.
- **Plus généralement**, l'inpainting est un bon moyen de donner de la connexité en reconstruisant les structures.